Funzioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^n$

Applicazioni lineari

Definizione 1. *Diciamo che una funzione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se*

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che ogni funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è rappresentata da una matrice. Definiamo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

e per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Allora, per ogni vettore (colonna) $h \in \mathbb{R}^n$ con coordinate $h_1, h_2, \dots, h_n$, abbiamo

$$\begin{aligned} L(h) &= L(h_1e_1 + h_2e_2 + \dots + h_ne_n) \\ &= h_1L(e_1) + h_2L(e_2) + \dots + h_nL(e_n) = \begin{pmatrix} h_1a_{11} + h_2a_{12} + \dots + h_na_{1n} \\ h_1a_{21} + h_2a_{22} + \dots + h_na_{2n} \\ \vdots \\ h_1a_{m1} + h_2a_{m2} + \dots + h_na_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, la funzione lineare L è rappresntata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Precisamente, abbiamo che

$$L(h) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\boxed{\text{Scriveremo quindi } L_A(h) \text{, oppure semplicemente } Ah \text{, al posto di } L(h).}$$

Considerando i vettori riga della matrice A :

$$\begin{cases} A_1 = \big(a_{11},\, a_{12},\, \dots,\, a_{1n}\big), \\ A_2 = \big(a_{21},\, a_{22},\, \dots,\, a_{2n}\big), \\ \dots \\ A_m = \big(a_{m1},\, a_{m2},\, \dots,\, a_{mn}\big). \end{cases}$$

Allora, possiamo anche scrivere $L_A(h)$ come

$$L_A(h) = \begin{pmatrix} A_1 \cdot h \\ A_2 \cdot h \\ \vdots \\ A_m \cdot h \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$\begin{aligned} |L(h)| &= \Big(\sum_{j=1}^m |A_j \cdot h|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\,|h|^2\Big)^{1/2} = \Big(|h|^2 \sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} = |h|\Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2\Big)^{1/2}.$$

Definizione: Definiamo la norma della matrice A come

$$\|A\| = \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2\Big)^{1/2}.$$

Quindi, abbiamo dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 2. *Per ogni applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, abbiamo la disuguaglianza*

$$|L_A(h)| \le \|A\||h| \qquad \textit{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Funzioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^m$

Definizione 3. *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$. Diciamo che F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, se esiste una funzione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che

$$F(X_0 + X) = F(X_0) + L(X) + o(|X|),$$

ovvero tale che

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - L(X)|}{|X|} = 0.$$

Inoltre, diremo che F è derivabile in X_0 se esistono le derivate parziali $\partial_j F_i(X_0)$ per ogni $i = 1, \dots, m$ ed ogni $j = 1, \dots, n$.

Proposizione 4 (Differenziabile $\Rightarrow$ continua)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Se F è differenziabile in $X_0 \in \Omega$, allora F è anche continua in X_0.*

Dimostrazione: per esercizio.

Proposizione 5. *Siano* Ω *un insieme aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$. *Allora* F *è differenziabile se e solo se tutte le funzioni a valori reali* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *lo sono. Di conseguenza, se* F *è differenziabile nel punto* $X_0 \in \Omega$, *allora è anche derivabile in* X_0 *e*

$$F(X_0+X) = F(X_0) + \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \ldots & \partial_n F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(X_0) & \ldots & \partial_n F_m(X_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + o(|X|).$$

Definizione. La matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \ldots & \partial_n F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(X_0) & \ldots & \partial_n F_m(X_0) \end{pmatrix}$$

è detta matrice jacobiana di F (in X_0) e viene indicata con

$$JF(X_0) \quad \text{oppure} \quad DF(X_0).$$

Dimostrazione: Sia A una matrice con m righe ed n colonne e con vettori riga $A_1, \ldots, A_m$, dove

$$A_j \in \mathbb{R}^n \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Quindi il vettore

$$F(X_0 + X) - F(X_0) - AX \in \mathbb{R}^m$$

ha componenti

$$F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X \qquad \text{dove} \qquad j = 1, \ldots, m,$$

e possiamo calcolare

$$\frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - AX|}{|X|} = \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X}{|X|} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - AX|}{|X|} = 0$$

se e solo se

$$\lim_{X \to 0} \frac{\big|F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X\big|}{|X|} = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Si ha quindi che F è differenziabile in X_0 se e solo se le funzioni a valori reali $F_1, \ldots, F_m$ lo sono. Inoltre, i vettori riga A_j della matrice A sono i gradienti (trasposti) delle funzioni reali F_j:

$$A_j = DF_j(X_0) = \big(\partial_1 F_j(X_0), \ldots, \partial_n F_j(X_0)\big),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come immediata conseguenza otteniamo la seguente generalizzazione del teorema del differenziale.

Corollario 6 (Teorema del differenziale)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione derivabile in Ω. Se le derivate parziali

$$\partial_i F_j : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m,$$

sono continue in X_0, allora F è differenziabile in X_0.

Un altro corollario della Proposizione 5 è il seguente.

Corollario 7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad e \qquad G : \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

due funzioni differenziabili nel punto $X_0 \in \Omega$. Allora:

(a) *la somma $F + G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in X_0;*

(b) *il prodotto scalare $F \cdot G : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in X_0.*

Composizione di funzioni differenziabili

Teorema 8 (Composizione di funzioni differenziabili)**.** *Siano*

$$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

due funzioni differenziabili rispettivamente nei punti

$$X_0 \in \mathbb{R}^d \qquad e \qquad Y_0 := F(X_0) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Allora, la funzione composta

$$G \circ F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

è differenziabile in X_0 e

$$D(G \circ F)(X_0) = DG(F(X_0))DF(X_0)$$

che possiamo scrivere anche come

$$\begin{pmatrix} \partial_1 (G \circ F)_1(X_0) & \dots & \partial_d (G \circ F)_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 (G \circ F)_m(X_0) & \dots & \partial_d (G \circ F)_m(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix}.$$

oppure, ommettendo la variabile X_0,

$$\begin{pmatrix} \partial_1 (G \circ F)_1 & \dots & \partial_d (G \circ F)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 (G \circ F)_m & \dots & \partial_d (G \circ F)_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1 \circ F & \dots & \partial_n G_1 \circ F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m \circ F & \dots & \partial_n G_m \circ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \dots & \partial_d F_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n & \dots & \partial_d F_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione: Siano

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix}.$$

Per ipotesi, esistono funzioni

$$\varepsilon_F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

tali che

$$F(X_0 + X) = F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{X\to 0} \frac{|\varepsilon_F(X)|}{|X|} = 0\ ,$$

$$G(Y_0 + Y) = F(Y_0) + BY + \varepsilon_G(Y) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{Y\to 0} \frac{|\varepsilon_G(Y)|}{|Y|} = 0\ .$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned} G(F(X_0 + X)) &= G\big(F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X)\big) \\ &= G\big(F(X_0)\big) + B\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) \\ &= G\big(F(X_0)\big) + BAX + B\big(\varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big). \end{aligned}$$

Quindi, basta dimostrare che

$$B\big(\varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) = o(X).$$

Infatti, abbiamo che

$$\frac{\big|B\big(\varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} \leq \|B\| \frac{\big|\varepsilon_F(X)\big|}{|X|},$$

e dunque

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|B\big(\varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} = 0.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} &= \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \frac{\big|AX + \varepsilon_F(X)\big|}{|X|} \\ &\leq \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \left(\|A\| + \frac{\big|\varepsilon_F(X)\big|}{|X|} \right), \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} = 0. \qquad \square$$

Diffeomorfismi

Definizione 9. *Siano U e V due insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che la funzione*

$$\Phi : U \to V$$

è un **omeomorfismo** *tra U e V, se:*

- *Φ è continua;*
- *$\Phi : U \to V$ è bigettiva ;*
- *la sua inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ è contiua.*

Proposizione 10. *Siano U e V due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\Phi : U \to V$ un omeomorfismo. Allora:*

(i) *per ogni aperto $A \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(A)$ è aperto.*

(ii) *per ogni aperto $A \subset U$, l'insieme $\Phi(A)$ è aperto.*

(iii) *per ogni compatto $K \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(K)$ è compatto.*

(iv) *per ogni compatto $K \subset U$, l'insieme $\Phi(K)$ è compatto.*

(v) *per ogni chiuso $C \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(C)$ è chiuso.*

(vi) *per ogni chiuso $C \subset U$, l'insieme $\Phi(C)$ è chiuso.*

(vii) *per ogni insieme Ω tale che $\overline{\Omega} \subset U$ abbiamo che $\Phi(\partial\Omega) = \partial(\Phi(\Omega))$.*

Lemma 11. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora, per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^m$, anche l'insieme*

$$\Phi^{-1}(A) = \big\{x \in \Omega \ : \ \Phi(x) \in A\big\} \subset \mathbb{R}^n$$

è aperto.

Esercizio 12. *Siano U e V due insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia $\Phi : U \to V$ un omeomoerfismo tra U e V. Mostrare che U è connesso per archi se e solo se V è connesso per archi.*

Definizione 13. *Siano U e V due insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che la funzione*

$$\Phi : U \to V$$

è un **diffeomorfismo** *di classe C^1 tra U e V, se:*

- *Φ è di classe C^1 su U (ovvero Φ è continua e differenziabile in ogni punto di U e le derivate parziali delle sue componenti sono funzioni continue);*
- *$\Phi : U \to V$ è bigettiva ;*
- *la sua inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ è di classe C^1 su V.*

Proposizione 14. *Siano U e V due aperti connessi di $\mathbb{R}^n$. Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora,*

$$\det J\Phi(x) \neq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in U.$$

Inolte, la funzione

$$\det J\Phi \ : U \to \mathbb{R}$$

ha segno costante su U.

Lemma 15. *Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora*

$$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

Dimostrazione (del lemma) in dimensione due. Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix} &= (aA + bB)(cC + dD) - (cA + dB)(aC + bD) \\ &= aAdD + bBcC - \big(cAbD + dBaC\big) \\ &= (ad - bc)(AD - BC) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione della proposizione: Sia $\Psi : V \to U$ l'inversa di Φ. Siano $X_0 \in U$ e $Y_0 = \Phi(X_0) \in V$. Allora, abbiamo che

$$J\Psi(Y_0)\, J\Phi(X_0) = Id.$$

Di conseguenza,

$$\det\big(J\Psi(Y_0)\big)\ \det\big(J\Phi(X_0)\big) = \det(Id) = 1,$$

il che dimostra che $\det J\Phi \neq 0$ in U. Osserviamo che la funzione $\det J\Phi$ è ottenuta come somma e prodotto delle derivate parziali di Φ. Di conseguenza, essa è continua su U. Infine, siccome l'insieme U è connesso, abbiamo che $\det J\Phi$ non cambia segno in U. $\square$